Für $A, B \in M(n \times n; K)$, $\lambda \in K$:

✗ (a) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

✓ (b) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

✗ (c) $\det(A+B) = \det(A) \cdot \det(B)$

✗ (d) $\det(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \det(A)$ ×

✗ (e) $\det(\lambda \cdot A) = \det(A)$

✓ (f) $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$ ←

✓ (g) $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$

$\det A \cdot \det B$

$\det B \cdot \det A$

$$\det \begin{array}{c|c} \overbrace{\hphantom{xxxxxx}}^{n} & \\ \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} & n \end{array} = (-1)^n$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

$n=1 \quad \det(1) = 1$

$n=2 \quad \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$

$n=3 \quad \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1$

$n=4 \quad \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^2 = 1$

(A) Fallunterscheidung nach $[n] \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(-1)^{(n-1)+(n-2)+(n-3)+\dots+1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ 1 & & & & & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & \iddots & \\ 1 & 1 & & 0 \end{pmatrix}$

Welche Matrizen sind invertierbar?

		$K=\mathbb{R}$ det		$K=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
(a)	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	1	✓	✓
(b)	$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$	4	✓	✓
(c)	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	-1	✓	✓
(d)	$\begin{pmatrix}1&19\\28&1\end{pmatrix}$	$\neq 0$	✓	$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ ✗
(e)	$\begin{pmatrix}7&0\\2&0\end{pmatrix}$	0	✗	✗
(f)	$\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$	-2	✓	✓
(g)	$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$		✗	✗
(h)	$\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}$	0	✗	✗
(i)	$\begin{pmatrix}2&1\\7&5\end{pmatrix}$	3	✓	$\det\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=3=0$ ✗

Beweis d:

$$\mathbb{Z} \ni \det(A)$$

$$\mathbb{Z} \ni \det(B) = \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

Für $d \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$d^{-1} \in \mathbb{Z} \iff d \in \{\pm 1\}. \quad \square$$

Notiz:

$A \in M(n \times n; \mathbb{Z})$ invertierbar

$\iff$ A invertierbar in $M(n \times n; \mathbb{Q})$

und $A^{-1} \in M(n \times n; \mathbb{Z})$

$$M(n \times n; \mathbb{Z}) \subset \underbrace{\mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{Q})}_{\text{Theorie gilt}}$$

Fassen Sie die folgenden Matrizen zu Äquivalenzklassen zusammen!

Ähnlichkeitsklassen
$\exists T:\ T^{-1} M T = M'$

Rang
Determinante
Spur

$O \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 0 0 0

$B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 1 0 1

(*)

$F \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2 −1 0

$C \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1 0 1

$G \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2 −1 1

$D \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 1 0 4

$H \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ 2 −2 −1

$J \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 2 2 2

$E \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 1 0 3

$I \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 2 −2 5

$E_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2 1 2